### Линейные пространства

1. Определение. Единственность нулевого и обратного элементов. Примеры.

*Линейные* (*векторные*) *пространства* возникли в математике как обобщения пространства трёхмерных векторов, которые можно складывать (по правилу параллелограмма) и умножать на числа.

*Основным полем* будем называть одно из двух числовых множеств: - поле вещественных чисел;  - поле комплексных чисел.

В тех случаях, когда утверждение справедливо и для , и для основное поле будем обозначать буквой .

Определение. Непустое множество (абстрактное, любое) называют *линейным* (*векторным*) пространством над полем , если:

1. В введена операция *сложения*, то есть в каждой упорядоченной паре элементов из соответствует , где .
2. Определено *произведение* элементов из и чисел из . То есть ставится в соответствие элемент – произведение .
3. Указанные операции сложения элементов и умножения их на числа подчинены следующим 8 свойствам, которые называют аксиомами:
4. *–* *свойство коммутативности*
5. – *свойство ассоциативности*
6. – *аксиома о существовании нулевого элемента*
7. – *аксиома о существовании противоположного элемента*
8. – *аксиома дистрибутивности*
9. – *аксиома дистрибутивности*

Элементы линейного пространства называются *векторами*, а элементы – *скалярами*.

Если линейное пространство рассматривается при (говорят: «над полем »), то его называют *вещественным*; если же при , то *комплексным*.

Докажем, что *нулевой элемент* (из [акс. 3](#_Линейные_пространства)) единственный.

Допустим , и - нулевые, то есть  [(1)](#линал1_1) и  [(2)](#линал1_2). Тогда имеем , отсюда - единственность нулевого (нейтрального) элемента доказана.

Докажем единственность обратного элемента (из [акс. 4](#_Линейные_пространства)).

Пусть для и - противоположны, то есть  [(3)](#линал1_3) и  [(4)](#линал1_4). Тогда имеем . Отсюда - единственность противоположного элемента доказана.

Приведём примеры:

1. – множества векторов на прямой в плоскости и в пространстве соответственно с обычными операциями их сложения и умножения на числа.
2. Рассмотрим множество всех векторов-столбцов длины с вещественными элементами .

Определим операции сложения и умножения на следующим образом: , .

Заданные операции сложения векторов и умножения их на числа можно назвать «*естественными*», так как такие операции уже использовались при изучении матриц.

1. Аналогично пространству вводится пространство .

имеет такие же операции сложения векторов и умножения их на комплексные числа .

, разумеется, является комплексным пространством.

1. Множества матриц с вещественными элементами и с естественными операциями (сложением матриц и умножением на вещественные числа) представляет *вещественное линейное пространство*.

Если множество заменить на матриц с комплексными элементами и умножением этих матриц на комплексные числа, то мы получим *комплексное линейное пространство*.

1. Множество всех полиномов с вещественными коэффициентами на прямой (можно и с ). Полиномы с естественными операциями и умножением их на вещественные числа образуют одноимённое вещественное линейное пространство.
2. Символом обозначают множество полиномов степени не выше с естественными операциями сложения полиномов и умножения их на вещественные числа.

Введём множество упорядоченных пар , где и – вещественные числа, . Определим операцию сложения: и умножения на вещ. числа . Ясно, что ; .

2. Элементарные свойства линейных пространств

Доказательства:

1. ; .

Прибавим к последним , противоположный . Получим (.

1. , т. е. , так же, как и в 1 получим .
2. Если и , то умножая 1 на получим
3. Нужно доказать, что и являются противоположными . Действительно .

3. Линейно зависимая (ЛЗ) и линейно независимая (ЛН) системы векторов. Условия совместности СЛУ и существования нетривиального решения однородной СЛУ.

Пусть – линейное пространство над полем . Любой упорядоченный набор векторов из называют *системой векторов*

Система векторов называется *линейно зависимой*, если существует такой набор , среди которых есть хотя бы одно ненулевое число.  [(1)](#линал3_1).

Числовой набор, в котором присутствует хотя бы одно ненулевое число (все нулевые) называется *нетривиальным* (*тривиальным*).

Определение. ЛЗ можно переформулировать так: система векторов линейно зависима, если для некоторого нетривиального числового набора выполняется [(1)](#линал3_1).

Нетривиальность числового набора  [(2)](#линал3_2), если , можно писать, как  [(2’)](#линал3_2штрих).

Система векторов называется ЛН, если она не является ЛЗ. Последнее означает, что равенство [(1)](#линал3_1) выполняется при (только при тривиальном числовом наборе).

Пусть векторы – векторы ЛП над полем , и . Вектор называется *линейной комбинацией* векторов системы .

Определения ЛЗ и ЛН можно переформулировать так: система – ЛЗ (ЛН), если их линейная комбинация равна нулю для нетривиального набора коэффициентов (только для тривиального набора коэффициентов).

Рассмотрим СЛУ  [(3)](#линал3_3).

Вспомним, что [(3)](#линал3_3) можно переписать в виде  [(4)](#линал3_4).

В силу [(4)](#линал3_4) можно сказать, что [(3)](#линал3_3) совместна тогда и только тогда, когда является линейной комбинацией векторов-столбцов .

Рассмотрим теперь однородную СЛУ  [(5)](#линал3_5).

Легко видеть, что справедливо заключение: СЛУ [(5)](#линал3_5) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда векторы-столбцы линейно зависимы.

4. Критерий равенства нулю определителя.

Теорема. определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда система векторов-столбцов (строк) ЛЗ.

Доказательство. Рассмотрим систему  [(1)](#линал4_1). Её можно переписать в виде (2). По определению ЛЗ, систему векторов-столбцов ЛЗ тогда и только тогда, когда существует нетривиальный набор коэффициентов . Последнее эквивалентно тому, что [(1)](#линал4_1) имеет нетривиальное решение. Из следствия из теоремы Крамера вытекает, что [(1)](#линал4_1) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель .

Из сказанного вытекает утверждение теоремы для столбцов, поскольку определитель матрицы при её транспонировании не меняется, то теорема справедлива и для строк.

5. Критерий линейной зависимости системы, состоящей из одного и из двух векторов.

Теорема 1. Система, состоящая из одного вектора ЛЗ тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Доказательство. Пусть – ЛЗ, тогда существует нетривиальный набор (здесь состоит из одного числа) чисел такой, что  [(1)](#линал5_1)  [(2)](#линал5_2). Из элементарных свойств ЛП, из [(1)](#линал5_1), [(2)](#линал5_2) следует, что . Пусть теперь , то тогда  [(3)](#линал5_3). [(3)](#линал5_3) означает, что – ЛЗ система.

Теорема 2. Два вектора линейного пространства образуют ЛЗ систему тогда и только тогда, когда эти векторы пропорциональны, то есть либо [(4)](#линал5_4), либо  [(5)](#линал5_5).

Доказательство. Действительно ЛЗ означает существование нетривиального числового набора такого, что  [(6)](#линал5_6). Если , то поделим [(6)](#линал5_6) на : , получили [(4)](#линал5_4). Если , то поделим [(6)](#линал5_6) на получим [(5)](#линал5_5).

6. Критерий ЛЗ, состоящей из более чем одного вектора.

Теорема. Система векторов линейного пространства над полем является ЛЗ тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

1. По определению – ЛЗ тогда и только тогда, когда , среди которых хотя бы одно из чисел ненулевое: и  [(1)](#линал6_1). Поделим [(1)](#линал6_1) на . , так что является линейной комбинацией остальных.
2. Пусть теперь в есть вектор, являющийся линейной комбинацией остальных. Пусть это , то есть  [(2)](#линал6_2). [(2)](#линал6_2) можно переписать в виде:  [(3)](#линал6_3). Из [(3)](#линал6_3) следует, что существует нетривиальный числовой набор, при котором линейная комбинация векторов нулевая, значит – ЛЗ.

7. Перестановка векторов системы. Система, содержащая линейно зависимую подсистему. Следствие.

В силу аксиомы коммутативности сложения векторов линейного пространства ЛЗ система остаётся ЛЗ и при перестановке векторов системы, а ЛН система остается ЛН при перестановке её векторов.

Теорема. Система содержащая ЛЗ подсистему ЛЗ.

Доказательство. пусть мы имеет систему, первые векторов которой образуют ЛЗ систему, то есть среди которых хотя бы одно не ноль, пусть такой, что  [(1)](#линал7_1). [(1)](#линал7_1) можно переписать в виде  [(2)](#линал7_2). Поскольку в [(2)](#линал7_2) имеется ненулевой коэффициент (, то – ЛЗ.

8. Второй критерий ЛЗ системы.

Теорема. Система ненулевых векторов ЛП ЛЗ тогда и только тогда, когда один из векторов системы является линейной комбинацией предыдущих.

Лемма. Пусть система – ЛН, – ЛЗ, тогда x является линейной комбинацией векторов системы . Из ЛЗ следует, что существует нетривиальный числовой набор такой, что  [(1)](#линал8_1). Ясно, что в [(1)](#линал8_1)  [(2)](#линал8_2), так как в противном случае из (1) следует  [(3)](#линал8_3), причём в [(3)](#линал8_3) хотя бы одно из , так как мы предположим, что (, но это противоречит ЛН .

Итак, в (1) , но тогда из (1) , то есть – линейная комбинация векторов .

Перейдём к доказательству теоремы. 1) Пусть – система ненулевых векторов, которая ЛЗ. Рассмотрим её подсистемы. – ЛН ; ; ...; – ЛЗ. По условию – ЛЗ, значит существует такой набор , такой что – ЛН; – ЛЗ. Из предыдущей леммы, применённой к следует, что является линейной комбинацией предыдущих.

В другую сторону. Если некоторый вектор является линейной комбинацией предыдущих, то он является и линейной комбинацией остальных, а потому по предыдущему критерию система – ЛЗ.

9. Полная система векторов. Примеры. Система с полной подсистемой. Следствие.

Пусть – ЛП над числовым полем . Система векторов называется *полной системой* векторов, если каждый вектор из является линейной комбинацией векторов . То есть .

Примеры полных систем.

1. , то есть (1).

В этом пространстве система является полной (это видно из (1)).

1. – вещественное линейное пространство векторов . В этом примере система векторов – является полной. Действительно
2. в – одномерное пространство векторов, то есть пространство векторов прямой. Очевидно, любой ненулевой вектор ( составляет полную систему.

e2

e1

В полной системой являются любые два ненулевых вектора.

e1

e2

В полную систему образуют любые три неколлинеарных вектора

1. В – пространстве всех многочленов полной системы нет, так как по определению системой векторов мы называем **конечное** упорядоченное множество этих векторов. Отсюда следует, что если бы была полная система векторов в , то существовал бы конечный набор элементов, такой что любой бы элементявляется линейной комбинацией этих. Однако, каков бы ни был конечный набор элементов можно взять элемент большей степени, который не является их линейной комбинацией.

Предложение. Система с полной подсистемой полна.

Напомним, что подсистемой данной системы называется саму эту систему и любую другую систему, полученную из данной вычеркиванием некоторых векторов. Мы будем рассматривать и пустые подсистемы.

Предложение очевидно. Действительно, если подсистема полна, то всякий вектор ЛП представим в виде линейной комбинации её векторов, но тогда этот вектор является линейной комбинацией и векторной системы – в комбинацию нужно включить векторы-системы, не вошедшие в подсистему с нулевым коэффициентом.

Следствие. Если система не является полной, то и всякая её подсистема не полна.

10. Сохранение полноты системы при перестановке векторов системы и при вычеркивании вектора, который является линейной комбинацией остальных.

Предложение 2. Полная система останется полной в результате перестановки её векторов.

Это следует из коммутативности сложения векторов в пространстве.

Предложение 3. Если в полной системе вычеркнуть вектор, который является линейной комбинацией остальных, то система останется полной.

Доказательство. Пусть система векторов из ЛП полна, то есть представим в виде (1), и пусть один из векторов системы является линейной комбинацией остальных. Пусть для определённости таким является (2). Подставив (2) в (1) получим (вместо ) отсюда видно, что является линейной комбинацией , то есть системы векторов, полученных из исходной вычёркиванием .

### Конечномерные линейные пространства

1. Размерность ЛП (случаи ноль, n, ).

Пусть – ЛП над числовым полем , его размерностью называется максимальное количество векторов, входящих в ЛН системы. Размерность обозначают .

Рассмотрим различные случаи размерности:

1. – это означает, что в нет ЛН систем, так что – нуль-пространство.
2. . Это значит, что в есть ЛН система, состоящая из векторов, а любая система, содержащая большее число – ЛЗ.

На самом деле, можно сказать и так: означает, что в есть ЛН система, содержащая векторов, а любые векторов образуют ЛЗ систему.

1. , означает, что в существуют ЛН системы со сколь угодно большим числом векторов.

ЛП в случае 3 называют бесконечномерным, а в 1,2 – конечномерным и -мерным

2. Доказательство равенства .

Нужно доказать, что

А) В есть системы, состоящие из ЛН векторов

Б) Любая система, состоящая из вектора – ЛЗ.

Докажем А. Возьмём векторы . Их штук. Докажем их ЛЗ. Для этого составим линейную комбинацию (1) и затем докажем, что в (1) . Левая часть (1) имеет вид так что (1) принимает вид А – доказано.

Докажем Б. Составим ЛК из векторов и приравняем к нулю.

(2)

Нужно доказать, что (2) может быть выполнено при нетривиальном наборе коэффициентов линейной комбинации, то есть (потому что если только в тривиальном, то это ЛН). От векторной записи перейдём к координатной, получим однородную СЛУ из уравнений. запишем как неизвестные, так что (2) запишется в виде однородной СЛУ из уравнений с неизвестным. Она не определена, то есть имеет не только нулевое решение.

Напоминание: напомним критерий неопределённости – СЛУ не определен тогда и только тогда, когда в её приведённом виде нет строки типа и число главных неизвестных с общего числа неизвестных. Напомним, что число главных неизвестных совпадает с числом ненулевых строк в приведённом виде основной матрицы.

Учтем так же, что у однородной системы в приведённом виде не может быть строки типа , так как она всегда совместна – имеет нулевое решение.

Из сказанного вытекает такой результат, который применялся в Б.

Лемма. Однородное СЛУ, в которой уравнений меньше, чем неизвестных не определена.

3. Определение базиса. Примеры.

Пусть – ЛП над числовым полем . Всякую полную ЛН систему в называют *базисом*.

Примеры:

1. В – система – является базисом. Действительно, мы доказали ЛН в и полноту тоже, напомним последнее (полноту). Возьмём . Очевидно, .
2. В система векторов (многочлены) образует базис. Действительно, докажем а) ЛН , б) полноту (только что доказали).

Доказательство a. Составим ЛК и приравняет к нулю (3). равен нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты нулевые, так что из (3) следует , значит – ЛН.

Утверждение б уже доказывали

1. В любой ненулевой вектор является базисом. В любая пара неколлинеарных векторов образует базис. В любая тройка некомпланарных векторов образует базис.

4. Теорема о базисе в -мерном пространстве, состоящем из векторов. Следствие.

Теорема. В -мерном ЛП существует базис, состоящий из векторов.

Доказательство. По определению размерности в силу условия в L существует ЛН система , состоящая из векторов, а любые векторов – ЛЗ. Докажем, что – базис в , поскольку – ЛН система, то осталось доказать её полноту. Возьмём и рассмотрим две системы: – ЛН (4) и – ЛЗ (5) (это с добавленным ). Из (4) и (5) согласно лемме, которую мы доказали ранее (см. вопрос 8, 2 критерий), следует, что является линейной комбинацией векторов из .

(тут у димы не всё было написано)

Следствие: в -мерном ЛП любые ЛН векторов образуют базис. Это следует из доказательства теоремы.

Заметим, что базиса нет только в нуль-пространстве, так как там нет ЛН векторов. В любом же -мерном пространстве, где базисов много. Действительно, если имеем какой-либо базис, то, умножив его векторы (базисные векторы) на любые ненулевые числа получим базис.

5. Теорема о размерности пространства, базис, который состоит из -векторов. Следствие.

Теорема. Размерность пространства, базис которого состоит из -векторов равна .

Доказательство. Пусть имеем ЛП , в котором есть базис . Докажем, что . Мы уже имеем систему , состоящую из ЛН векторов. Осталось доказать, что любая система – ЛЗ (2). Предположим, что (2) не выполнено. Рассмотрим систему . – ЛЗ, так как – полна, а потому – линейная комбинация векторов , но тогда по первому критерию линейной зависимости – ЛЗ. Теперь воспользуемся вторым критерием ЛЗ, согласно ему один из векторов является линейной комбинацией предыдущих. Ясно, что это вектор из , обозначим его . Учтём, что полна, так как содержит полную . Вычеркнув в , вновь получим полную систему (по основным свойствам вычёркивания), обозначим её . Добавим к : — это опять ЛЗ система, так как содержит полную . На основании второго критерия ЛЗ в новой системе есть вектор, являющийся линейной комбинацией предыдущих. Это не могут быть и , так как (2) не выполнено, то есть система – ЛН (3), а если система ЛН, не может быть ни один из векторов линейной комбинацией других. В новой системе вычеркнем вектор , являющийся линейной комбинацией предыдущих. Получим опять полную систему, которую обозначим , к ней добавим вектор : К применяем те же соображения, в результате которых вычеркиваем некоторый и переходим к системе . За шагов мы придём к системе: , которая полна, но тогда – ЛЗ. Мы пришли к противоречию с (3), значит (2) справедлива.

Следствие. Любые два базиса конечномерного ЛП содержат одинаковое число векторов.

6. Дополнение до базиса ЛН системы. Вычисление базиса из полной системы. Примеры вычислений размерности.

Предложение 1. Любую ЛН систему векторов конечномерного пространства можно дополнить до базиса.

Доказательство. Пусть имеем ЛН систему . Рассмотрим систему ( – базис). – ЛЗ, так как содержит полную . По второму критерий ЛЗ содержащий вектор, является ЛК предыдущего. Ясно, что это , вычеркнем его, получим . Так как полна, то и полна. Если окажется ЛН, то – базис и тогда теорема доказана. Если окажется ЛЗ, то применим опять второй критерий и вычеркнем ещё один , получим полную , её опять исследуем на ЛЗ. Если ЛЗ, то вычёркиваем снова. За конечное количество шагов мы придём к полной ЛН, то есть к базису.

Предложение 2. Всякая полная система содержит базис.

Доказательство. – ЛП (, – полная система, если - ЛН, то это и есть искомый базис. Если – ЛЗ, то опять применяем второй критерий ЛЗ, вычёркиваем некоторый . Получим систему , которая полна, как и . Если она ЛН, то это и есть искомый базис. Если – ЛЗ, то поступаем как выше. Ясно, что за конечное количество шагов мы придём к полной ЛН системе, то есть к искомому базису.

Примеры вычисления размерности пространства.

1. (1). Действительно, возьмём любой непустой вектор из , он ЛН и образует полную систему, так как . Таким образом образует базис , а потому имеем (1)
2. Легко доказать, что . Действительно, любые два неколлинеарных вектора образуют базис и любые три некомпланарных вектора образуют базис .
3. Рассмотри ЛП матриц размера . Действительно, система из векторов образует базис, поскольку является ЛН и полной.

Действительно, мы составим комбинаций

Возьмём . Очевидно,

1. , так как в система служит базисом.
2. В базиса нет. Действительно, мы поясняли, что там не полной системы.

8. Свойства координатных векторов.

Пусть мы имеем -мерное ЛП над числовым полем . Тогда в нем есть базис , состоящий из векторов. Возьмём любой из . Поскольку полна, является линейной комбинацией : (1)

Покажем, что коэффициенты линейной комбинации (1) определены вектором однозначно. Пусть наряду с (1) мы имеем такое разложение (2), получим . Так как – ЛН, то все скобки равны нулю, то есть

Мы доказали, что коэффициент в (1) определён вектором однозначно, поэтому корректно следующее определение: если вектор представлен с помощью базисных векторов в виде (1), то коэффициент называют *координатами* в базисе и пишут и называют координатным вектором. Представление (1) называется *разложением вектора по базису .*

Теорема 1. При сложении векторов их координаты складывают, а при умножении векторов на число его координаты умножают на это число.

Доказательство. Пусть мы имеем (1), то есть , а также (2), то есть . Сложим (1) и (2) (3). Из (3) следует, что . Первое утверждение теоремы доказано.

Доказательство второе. Для этого умножим (1) на : (4). Из (4) следует .

9. Изоморфизм.

Пусть – ЛП над одним и тем же числовым полем и – взаимно-однозначное отображение на , если это отображение сумму векторов в переводит в сумму векторов в , а произведение вектора из на число переводит в произведение образа этого вектора на указанное число, то называют *изоморфизмом* на , а пространства называют изоморфными.

Запишем это символами: обозначим для простоты сумму векторов в одним и тем же символом , а произведение этих векторов на число точкой . Тогда – изоморфизм означает:

1. – взаимно-однозначное

Изоморфность пространств обозначают .

На основании свойств векторов (см. теорему выше) отображение, ставящее в соответствие его координатный вектор , является изоморфизмом. . Здесь в доказательстве, по существу, нуждается лишь то, что это отображение – сюръективно.

10. Матрица перехода от базиса к базису. Теорема.

В любом ЛП существует бесконечно много базисов, если (в нуль-пространстве базисов нет). При решении той или иной задачи бывает удобно пользоваться тем или иным базисом. При этом нужно уметь пересчитывать координаты векторов при переходе от одного базиса к другому. Это делается с помощью *матрицы перехода* от базиса к базису .

Дадим её определение: пусть - базисы, которые называют старым () и новым (.

Разложение вектора нового базиса по-старому:

Матрица перехода называется *транспонированной матрицей коэффициентов этих разложений.*

(1)

Теорема. Пусть и – базисы в -мерном ЛП , тогда его координатные вектора в базисах и связаны равенством: =

Доказательство. Возьмём (2) и в новом базисе (3). Так что . Из (1) имеем (4). Подставим (4) в (3): (5). Сравнивая (2) с (5), получим: (6)

Формула (6) и подтверждает доказываемую формулу = . Действительно

11. Свойства матриц перехода.

Справедливы следующие свойства:

Пусть – три базиса в , , тогда:

1. – единичная матрица порядка
2. – обратима, и

Лемма. Пусть для двух квадратных матриц и порядка для справедливо (1), тогда (2).

Доказательство. Обозначим , тогда (1) примет вид (3), а (4). Возьмём в (3) , тогда , отсюда первый столб – нулевой. Затем возьмём в (3) , получим, что второй – нулевой и т. д. В результате получим (4).

Теперь доказательства свойств. Построим по определению:

1) Разложения (5) единственны, так как – базис, а значит ЛН система, а разложение любого вектора по ЛН системе единственно. Действительно, пусть . И этот же . Вычитая из одного равенства другое по определению ЛН системы все скобки равны нулю, то есть . Единственность разложений доказана. Из (5) в силу определения матрицы перехода получаем .

2) По предыдущей теореме (6) (8). Подставляя (8) в (7) (10)

Учитывая, что когда пробегает все , пробегает все

Вспомним, что для -мерного пространства , в котором фиксированный базис , каждому вектору поставлен в соответствие координатный вектор и указанное отображение (вектор-коорд.) есть изоморфизм между и . Мы доказывали, что это отображение взаимно-однозначно и сохраняет операции, то есть при сложении векторов из и умножении их на числа из их координаты складываются и умножаются на указанные числа соответственно.

*3)* Свойство 3 следует из свойства 2. Если положить в последнем . Действительно, , то есть , значит – обратима и

12. Подпространства. Два эквивалентных определения.

Определение 1. Пусть – ЛП над числовым полем . Непустое подмножество векторов из называется *подпространством* , если для любых векторов из их линейная комбинация так же принадлежит

Определение 2. Непустое подмножество пространства называется его подпространством, если относительно операций в само является пространством.

Докажем эквивалентность этих определений:

1. В начале покажем, что если – подпространство в смысле опр.2, то оно подпространство и в смысле опр.1. Действительно, поскольку является пространством (см. опр.2), то в силу определения пространства в можно умножать вектор на числа и можно их складывать, поэтому . Тем самым показано, что – подпространство и в смысле опр.2
2. Пусть теперь – подпространство в смысле опр.1, то есть . Беря в (1) , получим, что в определена сумма векторов. Беря в (1) , получим, что в можно умножать вектора на числа. Осталось проверить 8 аксиом. Большинство из них очевидны, т. к. – часть , а потому в большинстве аксиом утверждения, справедливые для , справедливы и для .

В проверке нуждаются: существование нуля в , существование противоположного в

Для проверки первой из указанных аксиом возьмём в (1) и из , получим .

Для проверки второй возьмём в (1) , получим .

Итак, все аксиомы в справедливы. Мы доказали, что определение 1 эквивалентно определению 2.

Примеры подпространств:

1. Любое ЛП содержит подпространства: нуль-пространство и всё пространство . Их называют *тривиальными* или *несобственными*, так как они есть во всех пространствах.
2. В пространстве , - подпространство.

Заметим, что не является подпространством . Действительно, не является пространством относительно операций в , поскольку, умножая вектор из на комплексное число мы покидаем .

13. Линейная оболочка (ЛО) подпространства.

Пусть дана ЛП над числовым полем и пусть – произвольная система векторов из . *Линейной оболочкой*, порождённой системой (обозначают ) называют множество всех возможных комбинаций векторов из , то есть

Часто вместо «линейная оболочка, порождённая S» говорят «линейная оболочка, натянутая на систему S»

Лемма. Линейная оболочка – подпространство.

Доказательство. Воспользуемся опр.1. Возьмём (1) и . Требуется доказать, что (2). Из (1) имеем ; , отсюда

. Мы доказали (2).

14. Свойства линейных оболочек (ЛО).

1. Если система векторов , то и . Действительно, всякий вектор из является линейной комбинацией векторов из , а потому является линейной комбинацией и векторов из , то есть
2. Если всякий вектор из является линейной комбинацией векторов из , то , заметим, что 1 свойство – частный случай 2.

По условию свойства 2 (1). Теперь учтем, что всякое пространство (а является пространством) вместе с любой системой векторов содержит их линейную комбинацию, так что из (1) следует .

1. , а каждый вектор является линейной комбинацией векторов из , то . Это следует из свойств 1 и 2.

15. Пересечение подпространств.

Пусть – ЛП над числовым полем , а и – его подпространства, тогда – тоже подпространство (1). Напомним

Докажем (1), пользуясь определением 1 подпространств. Возьмём (2) и из (2) следует, что (3). Так как и , и – подпространства, то из (3) следует, что (4) и (5). Из (4) и (5) следует, что , так что (1) доказано.

16. Определение прямой суммы подпространств. Критерий (1).

Пусть и – подпространства пространства . Их суммой называется множество векторов из , являющихся суммой двух векторов: один из , второй из .

*Прямой суммой* называется такая сумма, когда для представление единственно.

Пример. Пусть , и – подпространство из векторов , , компоненты которых, начиная с равны нулю, а – подпространство, состоящее из векторов , первые компонентов которых – нули. Ясно, что всякий можно записать в виде , где , таким образом, (1). Отсюда следует . Очевидно, сумма прямая, так как представление (1) очевидно единственно. Прямую сумму обозначают или .

Критерий (обновим нумерацию).

Теорема (Критерий прямой суммы). Пусть и – подпространства ЛП , тогда является прямой суммой и , то есть (\*) тогда и только тогда, когда (1) и (2).

Доказательство.

1. Пусть выполнены (1) и (2). В силу определения прямой суммы, поскольку (1) уже выполнено, остается доказать, что представление (3), единственно. Предположим противное: (4), . Вычтем из (4) (3), получим (, то есть ) (5)

Из (5) следует, что принадлежит и и . В силу (2) . Возвращаясь в (5), получим . Значит представление (3) единственно.

1. Пусть теперь выполнена (\*), тогда (1) очевидно выполнено. Докажем (2). Предположим противное, то есть (6), – ненулевой. Но тогда справедливы равенства (7), (8).
2. (7) и (8) противоречат (\*), так как представление вектора не единственно.

17. Теорема о размерности подпространства. Существование подпространств любой размерности, меньшей размерности пространства.

Поскольку подпространство в силу определения 2 само является пространством, то для него определена размерность. Допустим (1), а – подпространство, тогда (2).

Докажем (2). Допустим оно неверно, то есть , тогда в существует ЛН система векторов, состоящая из векторов. Но эта система лежит в , что противоречит (1) в силу определения о размерности.

Докажем теперь, что если в неравенстве (2) имеет место равенство, то есть (3), то (4). Действительно, мы имеем (5) как подпространство. Возьмём в базис , тогда из (5) следует (6). Мы знаем (из определения базиса), что – ЛН система, а потому её можно дополнить до базиса в . Однако в силу (3) в при этом не добавится ни одного вектора, то есть – базис и в . Так что (7). Из (7) и (6) и следует (4).

Докажем ещё один факт: пусть – конечномерное ЛП, тогда в существует подпространство любой меньшей размерности. Действительно, пусть и в – базис в , тогда для рассмотрим . Ясно, что и утверждение доказано.

Доказанные три утверждения сформулируем в виде теоремы.

Теорема.

1. Если– подпространство конечномерного , (8)*.*
2. Если при этом в (8) имеет место равенство, то .
3. Если , то в

Теорема о размерности суммы подпространств.

Пусть и – конечномерные подпространства ЛП , тогда справедливо равенство

(Без доказательства)

18. Теорема (критерий 2 прямой суммы).

Конечномерное пространство является прямой суммой своих подпространств и , тогда и только тогда, когда (1) и (2).

Доказательство.

1. Из (1) (2), согласно предыдущей теореме, о размерности следует, что (3)

По теореме пункта 17 в силу того, что – подпространства вытекает, что (4)

Из (1) и (4) в силу первого критерия прямой суммы следует, что (5)

1. Пусть теперь дано (5) и требуется доказать (1) и (2). (1) вытек из (5) в силу первого критерия, остаётся доказать (2), с учётом (1) .

19. Максимальная ЛН подсистема (МЛНП). Определение. Пример, дополнение ЛН подсистемы до МЛНП.

Пусть – ЛП и – система векторов из . Подсистемой системы называют *МЛНП*, если:

1. ЛН
2. не может быть расширена в рамках до подсистемы, которая ЛН.

МЛНП определена, вообще говоря, не единственным образом. Рассмотрим в пространстве 3 вектора .

b

c

a

Ясно, что любая пара или ( ЛН в . В тоже время при добавлении к указанным двум векторам третьего вектора мы получим ЛЗ систему. Таким образом каждая из указанных пар является МЛНП системы

Пример дополнения ЛН систем до МЛНП.  
Пусть мы имеем систему , тогда любая её ЛН система может быть дополнена до МЛНП.

Доказательство. Пусть . Выберем любую ЛН подсистему и дополним её до МЛНП. Допустим, что при добавлении к любого другого вектора из система становится ЛЗ, то значит – не может быть расширена в рамках до ЛН, а потому в этом случае МЛНП. Допустим при добавлении к некоторого вектора из некоторого вектора из мы получим ЛН систему , тогда исследуем, может ли при добавлении к ней вектора из оставаться ЛН. Если не может – то – МЛНП. Если может и мы получим расширенную ЛН систему , то продолжаем пытаться расширить уже . Поскольку в – конечное число векторов, то за конечное число шагов мы придём к искомой МЛНП, содержащей .

20. Теорема о базисе линейной оболочки. Следствие. Ранг системы векторов.

Теорема. Пусть – система векторов ЛП. Тогда любая его МЛНП системы является базисом линейной оболочки .

Доказательство. Пусть – МЛНП системы , докажем, что она базис в . Поскольку по определению МЛНП – ЛН, то остаётся доказать, что – полна в . В начале добавим к любой вектор из , тогда имеем – ЛН (1), а – ЛЗ (2), так как – МЛНП. Из (1) (2), согласно известной лемме, следует, что является линейной комбинацией векторов . Отсюда следует, что все векторы из является линейными комбинациями векторов из , а отсюда по свойствам линейной оболочки (3). С другой стороны, имеем и по свойствам линейной оболочки (4). Из (3) (4) следует (5), значит каждый вектор из является линейной комбинацией векторов , так что – полна в

Следствие. Число элементов МЛНП системы равно размерности и, следовательно, не зависит от выбора подсистемы.

Последнее следствие делает корректным следующее определение.

Определение. Пусть – система векторов ЛП . *Рангом* этой системы (обозначают ) называют число элементов в любой её МЛНП. Если система состоит из нулевых векторов, то полагают .

Иногда в книгах используют эквивалентное определение.

Определение. Рангом системы называют размер линейной оболочки , то есть

Из определения ранга системы , состоящей из векторов ЛП следует, что (1) и .

В силу вложенности (2) справедливы следующие свойства:

1. Система векторов ЛН тогда и только тогда, когда число элементов этой системы равно её рангу.
2. Система векторов конечномерного ЛП полна тогда и только тогда, когда её ранг равен размерности пространства.
3. Система векторов -мерного пространства является базисом в тогда и только тогда, когда

21. Определение ранга матрицы. Теорема 1 о ранге транспонированной матрицы. Теорема 2 о связи ранга с порядками миноров. Теорема 3 об инвариантности ранга при ЭП строк и столбцов.

Определение. *Рангом матрицы* называется число элементов в МЛНП её столбцов. В нулевой матрицу полагают ранг = 0.

Столбцы матрицы образуют систему m векторов из (для определённости при рассмотрении матриц будем считать, что ) так что данное определение ранга матрицы полностью соответствует рангу системы векторов любого пространства , . Ранг матрицы обозначают , ясно, что (1), также ясно, что (2).

Можно было бы дать другое определение искомой строки. Это обосновано следующей теоремой.

Теорема. Ранг матрицы не меняется при транспонировании.

Доказательство. Рассмотрим матрицу . Пусть , так что в системе столбцов имеется штук векторов, образующих МЛНП. Пусть это . Рассмотри систему строк. Допустим она содержит МЛНП, состоящую из строк. Наша задача – доказать, что (\*)*.*  
Рассмотрим СЛУ. (1)  
Она имеет только тривиальные решения (2), так как система – ЛН. Мы доказываем (\*). Предположим, что она не выполнена и пусть (3).  
В системе СЛУ (1) очевидно можно вычеркнуть все строки, являющиеся линейной комбинацией, указанного выше , которые образуют МЛНП. В результате перейдём от (1) к эквивалентной ей СЛУ, в которой строк и столбцов. По однородности СЛУ с условием (3) имеет нетривиальное решение – пришли к противоречию с (2). Значит (3) неверно, а , то есть (5) – ранг матрицы не превосходит МЛНП системы строк.  
Учтем, что значит (6) переписать в виде .  
Рассматривая как исходную и учитывая, что транспонация это , наряду с (6) получим (7). А из (6), (7) следует, что .

Следствие. Максимальное число ЛН строк матрицы совпадает с максимальным числом её ЛН столбцов.

Рассмотрим матрицу , зададим и выделим строк и столбцов. Пусть строки имеют номера и столбцы . На пересечении этих строк и столбцов стоят элементы матрицы порядка . Определитель этой матрицы, который обозначают называют *минором* -го порядка.

Примеры.

. Ясно, что она имеет миноры 1-го порядка (это всё её элементы) и миноры 2-го порядка

Теорема. Ранг матрицы равен наименьшему порядку её отличных от нуля миноров.

Доказательство. Пусть , тогда матрица имеет систему, состоящую из столбцов (строк), являющуюся МЛНП системы столбцов (строк). Докажем, что определена матрица, элементы которой стоят на пересечении указанных строк и столбцов отличных от нуля, тем самым доказали, что есть ненулевой минор порядка , отличный от нуля.

Рассмотрим однородную СЛУ, столбцами которой служат выбранные столбцы. Обозначим эту СЛУ (1). Она имеет только нулевое решение, согласно выбору . Поскольку среди строк матрицы штук образуют МЛНП, то в (1) можно вычеркнуть все строки, кроме , получим систему (2), эквивалентную (1). Поскольку (1) имеет только нулевое решение, то и (2) имеет только нулевое решение, а потому . Это значит, что мы имеет минор -го порядка, отличный от нуля. Осталось доказать, что каждый минор порядка равен нулю. Рассмотрим такой минор, это определитель матрицы, в которой столбцов, поэтому система его столбцов – ЛЗ. А значит минор порядка равен нулю.

Теорема 3. Ранг матрицы не меняется при ЭП её столбцов.

Доказательство. Достаточно доказать, что при выполнении одного ЭП ранг не изменится. Предположим, что имеем матрицу , совершим ЭП её столбцов и получим матрицу .

Ясно, что столбцы являются линейной комбинацией столбцов , а потому (по свойствам линейной оболочки) . А значит . Значит (1). Поскольку в силу обратимости ЭП, наряду с (1), имеем (2), из (1) и (2) следует, что .

Следствие. Ранг матрицы не меняется при ЭП её строк.

22. Теорема о ранге матрицы ступенчатой формы. Два следствия.

Теорема. Ранг матрицы ступенчатой формы равен числу её ненулевых строк.

Доказательство. Пусть мы имеем матрицу ступенчатой формы.

При написании мы учли, что при ЭП столбцов и строк ранг не меняется, а потому мы можем переставлять столбцы, и учитываем, что в матрицу ЛН строк, а остальные с помощью ЭП можно сделать нулями.  
В ненулевых строк, наша задача – доказать, что , для этого воспользуемся предыдущей теоремой о том, что ранг равен максимальному порядку отличных от нуля миноров. Имеем

Итак, ненулевой минор порядка существует. Любой же минор большего порядка обязан содержать нулевую строку, а потому равен нулю. Значит , а – количество ненулевых строк.

Следствие 1. Число ненулевых строк ступенчатой (в частности, приведённой) формы матрицы не зависит от способа нахождения указанной формы.

Следствие 2. Число главных (а значит и свободных) неизвестных совместной СЛУ не зависит от способа нахождения её приведённой формы.  
Действительно число главных неизвестных совпадает с рангом основной матрицы.

23. Связь линейной независимости и базисности системы векторов с матрицей, составленной из координатных векторов. Неопределённость однородной СЛУ.

24. Ранг произведения матриц. Следствие.

25. Теорема Кронекера–Капели.

26. Пространство решений однородной СЛУ.

Евклидовы пространства

1. Определение скалярного произведения. Следствия из аксиом. Примеры евклидовых пространств.

2. Теорема о переходе от линейного пространства к евклидову.

3. Неравенство Коши–Буняковского.

4. Длина вектора, расстояние между векторами, угол между векторами.

5. Ортогональность векторов: свойства, обобщённая теорема Пифагора.

6. Теорема о линейной независимости ортогональных векторов.

7. Ортонормированный базис, три его свойства.

8. Теорема существования ортонормированного базиса.

9. Процесс ортогонализации. Теорема.

10. Ортогональные матрицы, свойства и критерий.

11. Две теоремы об ортогональной матрице перехода.

12. Теорема об ортогональном разложении евклидова пространства. Следствие.

13. Ортогональное разложение в случае линейной оболочки. Расстояние до подпространства

### Линейные операторы и ЖНФ матрицы ЖНФ. Линейные операторы (общая теория).

1. Определение, простейшие свойства, примеры.

2. Пространство линейных операторов ( Hom(L)). Произведение операторов. Свойства произведения. Степени оператора.

3. Матрица оператора. Теорема.

4. Свойства матриц операторов.

5. Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису.

Теорема. Пусть и – два базиса конечномерного ЛП , A – Л.Оп. (Линейный оператор) в L. Тогда (\*)

Доказательство. Будем пользоваться формулой (1). Из неё (2).Кроме того (3). (2) = .

Из (2) (3) => ((4). Поскольку в (4) , значит пробегает множество все векторов из . Но тогда из 4 следует, что (5). Умножив (5) справа на , получим: (Учтём, что )

Получили (\*). Что и требовалось доказать.

6. Теорема о биекции между множеством линейных операторов и соответствующим множеством матриц.

Пусть – n-мерное линейное пространство над числовым множеством , и пусть в зафиксирован базис Каждому линейному оператору, действующему в , поставим в соответствие матрицу (.

Теорема. Пусть – n-мерное линейное пространство над , – базис в , тогда отображение устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством всех линейных операторов в и множеством всех квадратных матриц порядка , с элементами из .

Доказательство. Нам нужно доказать, что для любой квадратной матрицы порядка с элементами из найдётся единственный оператор , такой, что (\*)

Вначале предположим, что оператор существует и докажем его единственность.

Пусть и (1). По доказанной ранее теореме и в силу (1) (2)

Возьмём , . Тогда в силу (2) . Так что (3)

Из (3) следует, что если существует линейных оператор , удовлетворяющий (\*), то он единствен – а именно задаётся формулой (3).

Осталось доказать, что действительно существует. Для этого укажем закон (3), по которому действует в пространстве .

Тогда заданный оператор (см. (3)) – Линейный. (Проверьте самостоятельно) ***(Будет на экзамене)***

Теорема доказана.

7. Теорема о матрицах, подобных матрице Ae оператора. Определитель оператора.

Определение. Квадратные матрицы A и B одного порядка называются *подобными*, если существует обратная матрица R такая что,

Подобные матрицы обозначаются так:

Если порядки матриц и равны n, то рассмотрим множество всех матриц порядка n, с элементами из . Затем рассмотрим множество всех упорядоченных пар таких матриц. В этом множестве выделим пары подобных между собой матриц, тем самым зададим отношение подобия. Отметим простейшие свойства отношения подобия:

* – Рефлексивность
* Если , , то и – Транзитивность (нужно ли док-во?)
* Если , то и – Симметричность

Действительно, имеем

Напомним, что отношения, обладающие свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности называются отношение эквивалентности.

Отсюда следует, что множество всех квадратных матриц фиксированного порядка n распадается на классы эквивалентности: в каждом классе любая пара матриц – подобна. И в любом классе нет ни одной матрицы, которая не была бы подобна какой-либо матрицы из другого класса.

Теперь заметим, что в силу доказанной в предыдущем вопросе формулы . Матрицы фиксированных операторов в разных базисах подобные.

Справедлива более глубокая теорема:

Теорема: n мерное ЛП над P, произвольный базиc в L, – линейный оператор в L, матрица (порядка n) подобна матрице . Существует такой базис u, что .

Доказательство:

Так как , то существует обратимая(невырожденная) матрица , такая, что (\*). Рассмотрим систему векторов

…………..

Построенная система векторов образует новый базис в L. Действительно, она ЛН и полна, так как определитель не равен нулю (). Теперь построим матрицу перехода . А потому соотношение (\*\*), (Из (\*)). Что и требовалось доказать.

Обратимся к (\*\*), связывающей матрицу фиксированного оператора разных базисов. Из неё . Таким образом определители матриц операторов в любых базисах одни и те же. В связи с этим корректно следующее определение:

Определение: Определителем линейного оператора действующем в конечномерном линейном пространстве называется определитель его матрицы в любом базисе. Определитель оператора обозначается так: , где – любой базис.

8. Ядро и образ оператора.

– Линейный оператор в ЛП . Его *ядром* обозначают . Называют множество векторов из , которые переводят в нуль-вектор. .

Образом линейного оператора обозначают . Называют множество векторов, , для которых существует прообраз.

Теорема. Ядро и образ линейного оператора , действующего в ЛП , являются подпространствами в

Доказательство:

1. Пусть , – подпространство в . Воспользуемся определение подпространства. Возьмём и , таким образом (1), (2), (3), имеем - . Доказано (3), а значит и первое утверждение теоремы.

2.Пусть . Докажем, что подпространство в . Возьмём. Из (4) следует существование (5), A(6). Рассмотрим вектор (применяем (5) и (6)) , значит Второе утверждение, а значит и теорема, доказана.

Пример на ядро и образ:

Пусть (Множество векторов плоскости). Будем для простоты считать, что их начало в . Рассмотрим оператор ортогонального проектирования на ось .



Ясно, что это оператор , также ясно, что он линейный, так как проекция суммы равна сумме проекций (). Требуется найти и . Ясно что – множество векторов, лежащих на оси . – множество векторов, лежащих на оси .

9. Ранг оператора.

Рангом линейного оператора , действующего в конечномерном ЛП , называют число . Обозначают .

Докажем, что совпадает с рангом матрицы , где – базис в , то есть

Теорема. Пусть – линейный оператор в конечномерном ЛП , – базис в , тогда

Доказательство. Док-во опирается на следующею лемму:

Лемма. Пусть полная система векторов в . Тогда для линейного оператора , действующего в справедливо равенство: (l(…) - линейная оболочка).

Доказательство леммы: По определению образа Поскольку – полна в , то представим в виде ⊜ {. Лемма доказана.

Продолжение доказательства теоремы. Поскольку базис e () полная система в , то, по лемме , а потому (по определению)

(2). Вспомним теперь, что размерность линейной оболочки совпадает с рангом системы векторов, образующих эту оболочку, следовательно в силу (2), . Вспомним ещё (докажите, если не доказывали), что система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда линейна независима соответствующая система координатных векторов. Отсюда следует, что ранг системы векторов совпадает с рангом соответствующей системы координатных векторов, отсюда, в силу (3), получаем, что , это по определению матрицы оператора в базисе равно , что и требовалось доказать.

Следствие. Ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса , поскольку, по доказанному, он совпадает с .

10. Теорема о сумме размерностей ядра и образа оператора. (Без доказательства)

Теорема. Пусть – линейный оператор, действующий в конечномерном ЛП , тогда справедливо:

Сумма размерностей ядра и образа линейного оператора совпадает с размерностью пространств.

11. Обратный оператор. Теорема о линейности обратного оператора.

Пусть – некоторое множество; – оператор(отображение), действующий в . Оператор называют биективным, если он инъективный и сюръективный. Отображение , действующее на множество называют обратимым, если существует отображение , действующее на , такое что для . Не трудно доказать, что обратим тогда и только тогда, когда он является биекцией.

Определение: Линейный оператор, действующий в ЛП, называют обратимым, если он обратим как отображение.

Теорема. Если линейный оператор обратим, то обратный оператор является линейным оператором в .

Доказательство. Пусть линейный оператор обратим, тогда существует единственное отображение , такое, что . Покажем, что – линейный оператор. Возьмём и , определим векторы (1), (2), тогда (3), поясним, что в (1) мы учли, что , (Из (1) и (2)). Подействуем на равенство (3) оператором . , т. е. (В силу (1) и (2) , ), так что

12. Критерий обратимости оператора.

13. Условия, эквивалентные обратимости линейного оператора. Следствие.

14. Определение собственного значения (с.з.) и собственного вектора (с.в.). Критерий с.з. Следствие. Собственное подпространство. Спектр оператора.

15. Ряд условий, эквивалентных тому, что  – с.з. . Следствие.

16. Характеристический многочлен. Некоторые заключения о спектре оператора.

Спектральная теория линейных операторов.  
1. Две теоремы о спектре.

2. Теорема о л.н. системы с.в.

3. Обобщённая теорема о л.н. системы с.в.

4. Аннулирующий и минимальный многочлены. Теорема Гамильтона–Кэли .

5. Инвариантные подпространства.

6. Индуцированный оператор. Алгебраическая и геометрическая кратности с.з. Две теоремы.

7. Первый критерий оператора простой структуры. Следствия 1, 2. 8. Второй критерий оператора простой структуры.

Каноническое представление линейного оператора.

1. Клеточно-диагональные матрицы. Жорданова клетка Jk (). Лемма о степенях жордановой клетки Jk(0)Vk . Матрица Ж.Н.Ф.

2. Теорема о спектре нильпотентного оператора. Следствия 1, 2.

3. Жорданова цепочка векторов. Теорема о жордановом базисе в случае нильпотентного оператора. Следствия 1, 2, 3.

4. Свойства цепочек

5. Теорема о существовании ЖБ (жорданова базиса). Случай нильпотентного оператора и общий случай.

6. Теорема единственности матрицы ЖНФ. Лемма.

Модуль 7. Билинейные и квадратичные формы. Элементы общей алгебры

1. Билинейные формы (б.ф.). Теорема о представлении б.ф. Матрица б.ф

2. Преобразование матрицы б.ф. при переходе к новому базису. Неизменность ранга матрицы б.ф. при переходе к новому базису.

3. Квадратичная форма (к.ф.), порожденная симметричной б.ф. Восстановление полярной

б.ф. по к.ф. Неизменность ранга матрицы к.ф. . при переходе к новому базису.

4. Знакоопределенные и знакопеременные к.ф.

5. Каноническому вид, нормальный вид. Метод Лагранжа.

6. Закон инерции к.ф.

7. Теорема Якоби.

8. Критерий Сильвестра.

9. Алгебраические структуры: полугруппы, моноилы, поля, апгебры. Гомоморфизмы и изоморфизмы.